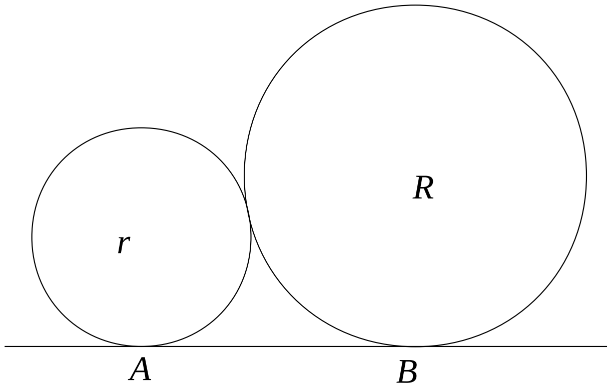
Ekzempleroj

1: Wasan

El tabuleto en Prefekturlando Miyagi, datita 1820.

Montri ke $AB^2 = 4rR$

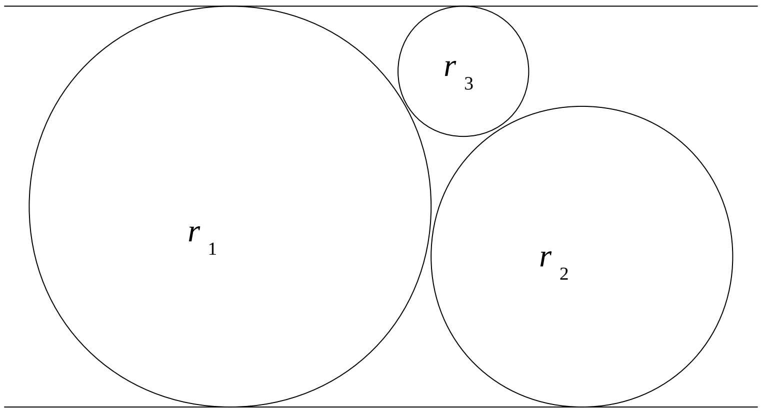


2: Tri cirkloj inter du linioj

Ĉi tiu troviĝas en prefekturlando Ibaraki, datita 1881, malfrue por sangako, kvankam ĝi aperas aliloke en Japanio sur aliaj tabuletoj. Ĝi vidiĝas en pli ampleksa formo, sed sen dato, ĉe la sanktejo Suwa-Taishi-Shimosha en la prefekturlando Nagano.

La linioj estas paralelaj. Montri ke

$r_1^2 = 4r_2r_3$

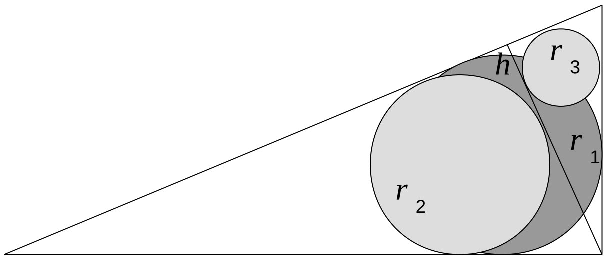


3: Tri cirkloj en ortangula trilatero

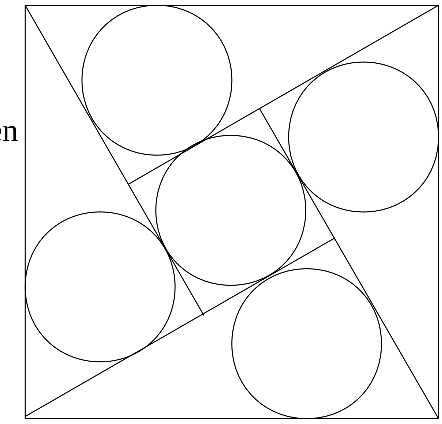
Jen alia de Iwate, sed ne datebla.

La ĉefa trilatero havas ortan angulon. La longo de la perpendiklo de la orta angulo al la hipotenuzo estas h. La radiuso de la enskribita cirklo de la ĉefa trilatero estas r_1, kaj de la aliaj cirkloj r_2, kaj r_3.

Pruvi ke $r_1+r_2+r_3 = h$.



4: Kvin cirkloj en kvadrato

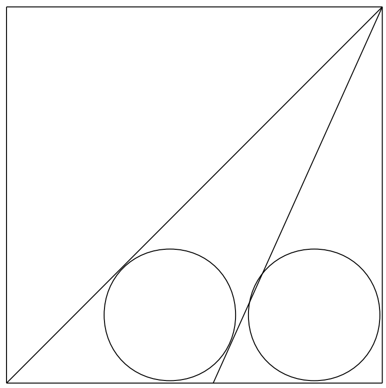


Ĉi tiu estas datita 1811 kaj troveblas ĉe la sanktejo Ichikawadani-Ōmoto en prefekturlando Nagano.

La kvin cirkloj ĉiuj havas la saman radiuson, kaj estas enskribita en la trilateroj kaj centra kvadrato.

Kio estas la rilato inter la radiuso de cirklo kaj la latero de la ekstera kvadrato?

5: Du egalaj cirkloj en kvadrato

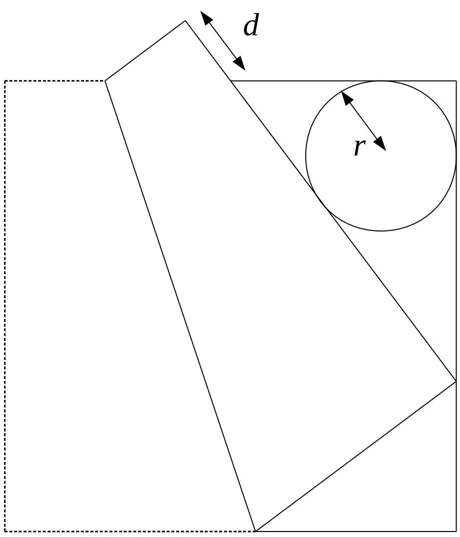


Ĉi tiu troviĝas en prefekturlando Hyōgo kaj estas datita 1893.

La cirkloj enskribitaj en du trilateroj havas la saman radiuson.

Kio estas la rilato inter la radiuso kaj la latero de la kvadrato?

6: Origamio



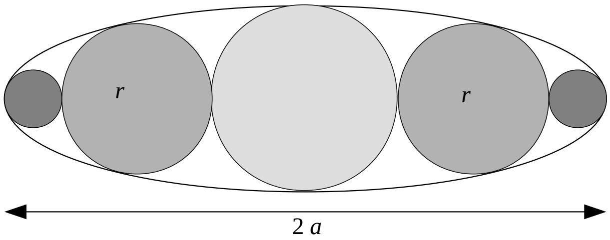
Ni scias la verkinton de ĉi tiu intriganta demando. Akama Chū muntis ĉi tiun tabuleton en 1813 ĉe Bodhisatva Kokūzō de la templo Magan-ji en prefekturlando Fukushima.

La malsupra maldekstra angulo de kvadrata peco de papero estis faldita sur la dekstran lateron.

Montri ke $r = d$.

7: Elipso kaj ĉeno de cirkloj

La tabuleto por ĉi tiu ne plu ekzistas, sed la registraĵoj diras ke ĝi pendis en prefekturlando Aichio en 1838.



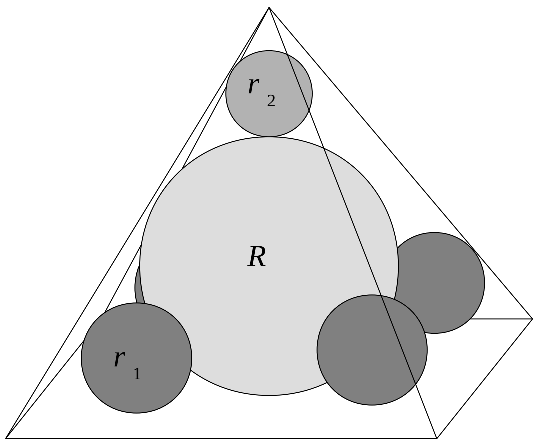
Elipso enhavas centran cirklon, kaj du cirklojn ĉe la finoj de la longa akso. Inter ili troviĝas du aliaj cirkloj, radiuse r, tuŝantaj cirklojn ambaŭflanke. Aldone, ĉiuj cirkloj tuŝas la elipson.

Pruvi ke $r = \dfrac{a}{4}$

Por aldona demando, kio estas la longo de la mallonga akso de la elipso? Se la respondo estas reala, do pruviĝos ke la aranĝo eblas. Ĉu ĝi estas unika?

8: Piramido kaj sferoj

La vera tabuleto perdiĝis, sed pendis en 1789 en prefekturlando Tokyo.

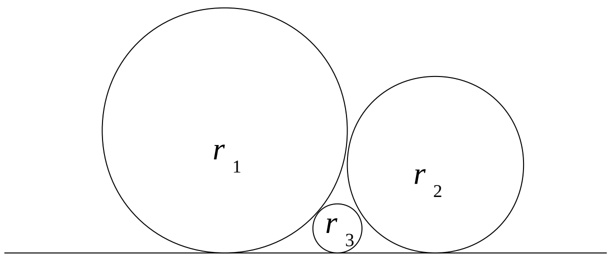


Simetria piramido sur kvadrata bazo enhavas grandan sferon, radiuso R, tuŝantan la bazon kaj ĉiujn kvar deklivajn flankojn. Kvar malpli grandaj sferoj, ĉiu kun radiuso r_1, lokiĝas en la anguloj de la bazo ĉiu tuŝanta du flankojn, la bazon, kaj la centran sferon. Alia malgranda sfero, radiuso r_2, sidas super la centra sfero kaj tuŝas ĉiujn kvar deklivajn flankojn.

Pruvi ke $R = \sqrt{2 r_1 r_2} + r_1$.

9: Tri cirklo sur linio

Ne estas iu ajn informo pri ĉi tiu, sed ĝi aperas en libroj pri sangakoj.



Tri cirkloj reciproke tuŝas unu la aliajn kaj linion. Montri ke

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

10: Du cirkloj sur ŝnuro

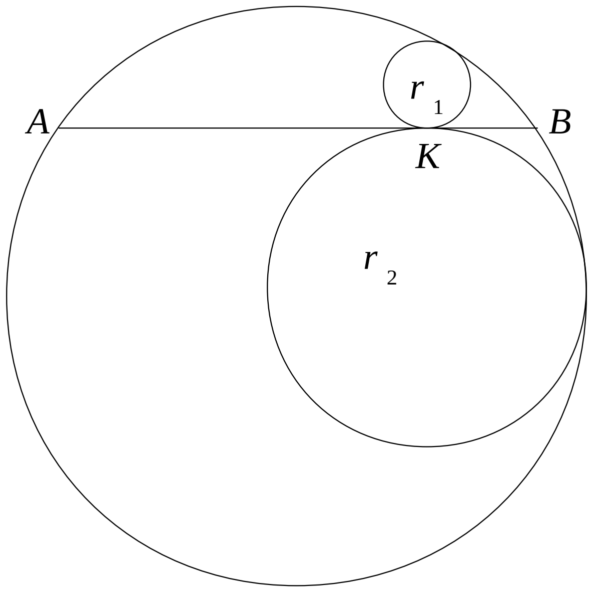
Ĉi tiu ankaŭ troviĝas en kolekto sed sen citaĵo al la originalo.

Du cirkloj ĉiu tuŝas ŝnuron ĉe la sama punkto *K*. La cirkloj ankaŭ ĉiu tuŝas la eksteran cirklon. Rigardu la diagramon.

Pruvi ke la proporcio

$$\frac{r_1}{r_2}$$

ne dependas de la loko de *K* sur la ŝnuro.



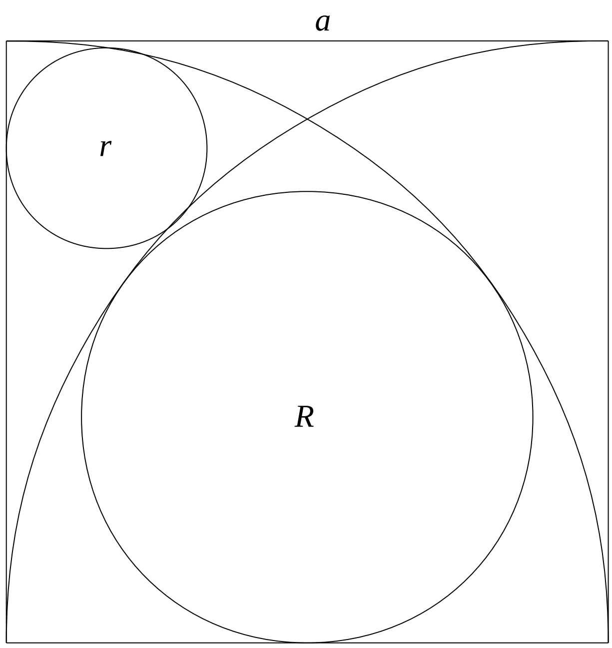
11: Kvaroncirkloj

Jen unu troviĝas ĉe Shizuoka en prefekturlando Chubu.

Du kvaroncirkloj estas desegnitaj kiel montritaj en kvadrato kun latero *a*.

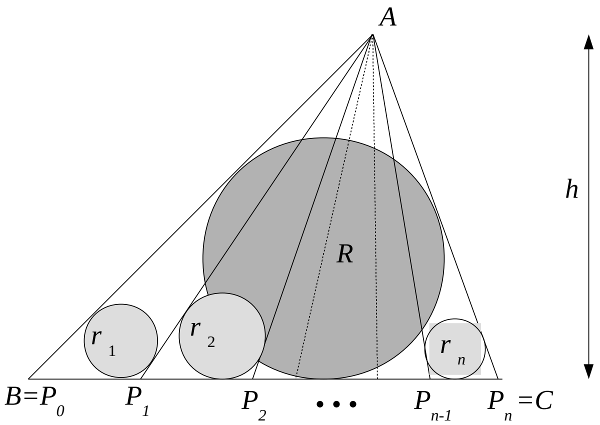
Du cirkloj, radiusoj *r* kaj *R*, tuŝas la laterojn kaj la kvaroncirklojn kiel montritaj.

Trovi *r* kaj *R* rilate de *a*.



12: Teoremo 9

Ĉi teoremon prezentas Eiichi kaj alia sen pruvo, kaj estis uzebla por iuj sangakoj.



n+1 arbitraj punktoj, nomitaj P_i, por i = 0 .. n, kuŝas sekvence sur la latero BC de trilatero ABC, tiel ke $P_0 = B$, kaj $P_n = C$. Cirkloj estas enskribitaj en ĉiu trilatero $AP_{i-1}P_i$ de radiuso r_i respektive.

La radiuso de la cirklo enskribita en la trilatero ABC estas R.

La alto de la trilatero estas h.

Pruvi ke

$$1-\frac{2R}{h} = \left(1-\frac{2r_1}{h}\right)\left(1-\frac{2r_2}{h}\right)\dots\left(1-\frac{2r_n}{h}\right)$$

aŭ, laŭ pli kutima notacio,

$$1-\frac{2R}{h} = \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{2r_i}{h}\right)$$

Notoj

Kiam litero aperis en cirklo, ĝi signifas la radiuso de la cirklo. Sufiksoj estas ofte uzitaj por distingi diversajn valorojn. Kutime klaras kiam cirkloj tuŝas liniojn, kaj oni supozu ke la figuroj estas tanĝantoj unu al la alia.

Tanĝanto al cirkJen io estas orta al la radiuso ĉe la punkto kie ili tuŝas.

Estas du tanĝantoj de ekstera punkto al cirklo, kaj ili egalas longe inter la punkto kaj la punktoj kie ili tuŝas la cirklon.

La enskribita cirklo de trilatero estas la unika cirklo, kiu tuŝas ĉiujn tri laterojn kaj kuŝas ene en la trilatero. Ĝian radiuson kelkfoje oni nomas la enradiuso.

La ĉirkaŭcirklo, aŭ ĉirkaŭskribita cirklo, de trilatero estas la unika circlo kiu pasas tra la tri verticoj de la trilatero. Ĝia radiuso estas la ĉirkaŭradiuso.

Citejo por utila rilatoj trovitaj en trilatero troviĝas ĉe:

https://www.cut-the-knot.org/triangle/MetricRelationsInTriangle.shtml

Kaj ĉi tiu parto de Vikipedia paĝo listigas kelkajn aliajn trigonometriajn rilatojn por anguloj de trilatero:

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities#Further_%22conditional%22_identities_for_the_case_%CE%B1_+_%CE%B2_+_%CE%B3_=_180%C2%B0

Jen iuj memorigiloj por trilatero *ABC*, kun lateroj *a*, *b* kaj *c* respektive kontraŭ anguloj *A*, *B* kaj *C*, duonperimetro $s = ½ (a + b + c)$, areo *T*, radiuso de enskribita cirklo *r*, radiuso de ĉirkaŭskribita cirklo *R*, kaj altitudo *h* de *A* al *a*.

Regulo kosinuso: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Regulo sinuso: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Areo: $T = rs = \frac{abc}{4R} = \frac{ah}{2}$

Enradiuso: $r = \frac{T}{s} = \frac{ah}{a+b+c}$

Formula de Herono: $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Regulo tangento: $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$