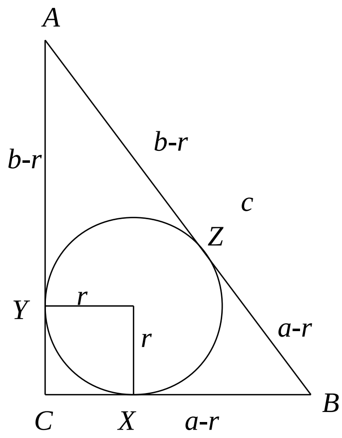
# Solvoj

## Utila lemo

En orta trilatero *ABC* la radiuso de la encirklo, *r*, estas donita per:

$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{..........................................................(L)}$$

## Pruvo




Kun la etikedoj en la desegno, klare *BX* = *BC* - *r* = *a* – *r*, kaj simile *AY* = *b* – *r*.

Ankaŭ *BX* kaj *BZ* estas tanĝanto al la cirklo, kaj do estas egalaj.

Simile *AZ* = *AY* = *b* – *r*.

Sed $c = AB = AZ + BZ = (b-r)+(a-r) = (a+b)-2r$

Re-aranĝante

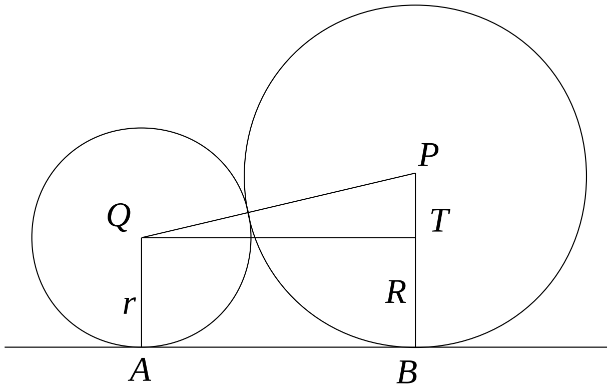
$$2r = (a+b)-c$$

Aŭ kiel petate

$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{..........................................................} \blacksquare$$

# 1: Wasan

Desegnu liniojn kiel montritaj.




Aplikante la teoremon Pitagoran al trilatero *PTQ*.

$QT^2 \;=\; PQ^2 - PT^2$ ..........................................(1)

sed $QT = AB$, $PQ = R+r$, kaj $PT = R - r$.

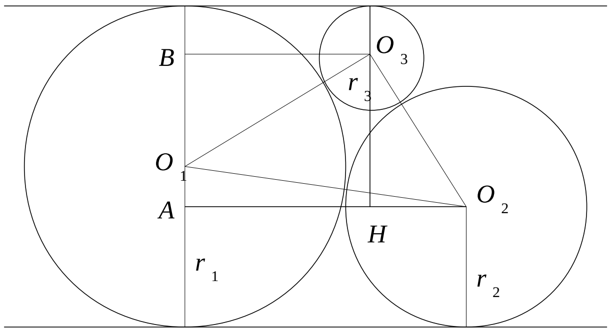
Metante tiujn valorojn en (1):

$AB^2 \;=\; (R+r)^2 - (R-r)^2$

Ellaborante la dekstran flankon kaj simpligante

$$AB^2 \;=\; 4rR \text{ ..............................................................} \blacksquare$$

## 2: Tri cirkloj inter du linioj




Kun notacio en la diagramo, aplikante Pitagoran kelkajn fojojn.

La distanco inter la linioj estas 2 $r_1$ kaj ni desegnu $O_3B$ kaj $O_2A$, kaj ankaŭ $AB$ kaj $O_3H$ estas orta al ili.

En $O_1BO_3$:

$$O_3B^2 = (r_1+r_3)^2-(r_1-r_3)^2 = 4r_1r_3$$

Do, prenante pozitivan kvadratan radikon:

$$O_3B = 2\sqrt{r_1r_3} \quad\text{.....................................................}(1)$$

Simile en $O_1AO_2$:

$$O_2A = 2\sqrt{r_1r_2} \quad\text{.....................................................}(2)$$

Ni akiras $$O_3H = AB = 2r_1-r_2-r_3 = 2r_1-(r_2+r_3) \quad\text{...............................}(3)$$

De (1) kaj (2):

$$O_2H = O_2A-O_3B = 2\sqrt{r_1r_2}-2\sqrt{r_1r_3} = 2\sqrt{r_1}\left(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_3}\right) \quad\text{...................}(4)$$

kaj ni ankaŭ scias la distancon inter la centroj de du tuŝantaj cirkloj:

$$O_2O_3 = r_2+r_3 \quad\text{.....................................................}(5)$$

De orta trilatero $O_2HO_3$, per Pitagoro:

$$O_2O_3^{\,2} = O_3H^2+ + O_2H^2 \quad\text{.............................................}(6)$$

Anstataŭante de (3), (4) kaj (5) en (6):

$$(r_2+r_3)^2 = \left|2r_1-(r_2+r_3)\right|^2 + 4r_1\left(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_3}\right)^2$$

Ellaborante la dekstran flankon:

$$(r_2+r_3)^2 = 4r_1^2+(r_2+r_3)^2-4r_1(r_2+r_3) + 4r_1(r_2+r_3) - 8r_1\sqrt{r_2r_3}$$

Nuligante komunajn termojn el ambaŭ flankoj, kaj simpligante:

$$0 = 4r_1^2 - 8r_1\sqrt{r_2r_3}$$

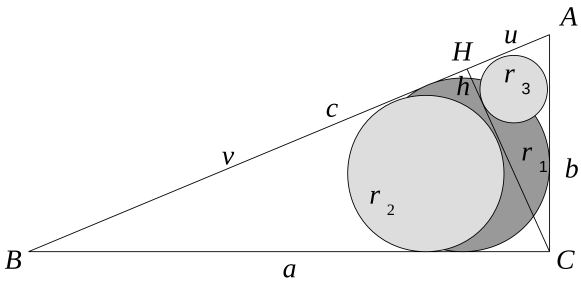
Dividante per $4r_1$ kaj re-aranĝante:

$$r_1 = 2\sqrt{r_2r_3}$$

Do fine, kvadratigante ĉiuj flankojn:

$$r_1^2 = 4r_2r_3 \quad\text{.........................................................}\blacksquare$$

## 3: Tri cirkloj en ortangula trilatero




En la diagramo, *h* estas la longo de *CH*, kaj *CH* estas orta al *AB*. Supozu *AH*=*u*, kaj *BH*=*v*.

Trilateroj *ACB*, *AHC*, kaj *BHC* estas ĉiuj ortaj, do aplikante la supran lemon *L*:

$$r_1 = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{.....................................................(1)}$$

$$r_2 = \frac{v+h-a}{2} \quad \text{.....................................................(2)}$$

$$r_3 = \frac{u+h-b}{2} \quad \text{.....................................................(3)}$$

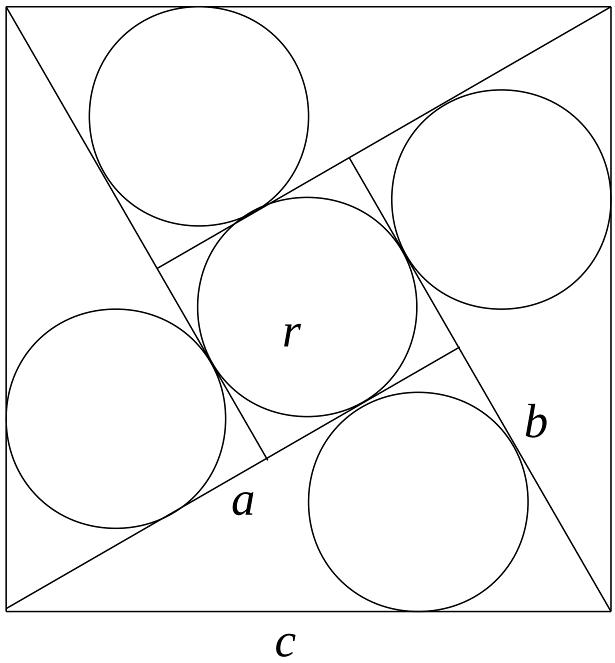
Sumante (1), (2) kaj (3) kune:

$$r_1+r_2+r_3 = \frac{a+b-c + v+h-a + u+h-b}{2} = \frac{u+v-c + 2h}{2}$$

Sed $u+v = c$, kaj do

$$r_1+r_2+r_3 = h \quad \text{..............................................................}\blacksquare$$

## 4: Kvin cirkloj en kvadrato




La radiuso de ĉiu cirklo estas *r*, la longo de la latero de ekstera kvadrato estas *c*, kaj de la aliaj lateroj de ĉiu trilatero estas *a* kaj *b*, kiel montrite. Laŭ simetrio, ĉiuj trilateroj estas kongruaj.

En la malgranda centra kvadrato:

$a-b = 2r$ ......................................................(1)

La radiuso de la enskribita cirklo estas

$r = \frac{a+b-c}{2}$ laŭ la lemo *L*.

Tio skribeblas:

$a+b = 2r+c$ ..................................................(2)

Subtrahante (1) de (2):

$c = (a+b) - (a-b) = 2b$ ..........................(3)

La trilateroj estas ortaj, do ni povas apliki la Pitagoran teoremon:

$$c^2 = a^2+b^2 \qquad (4)$$

Anstataŭante *c* de (3) en (4):

$$4b^2 = a^2+b^2 \text{ aŭ } a^2 = 3b^2,$$

do

$$a = \sqrt{3}b \qquad (5)$$

kie nur la pozitiva radiko gravas.

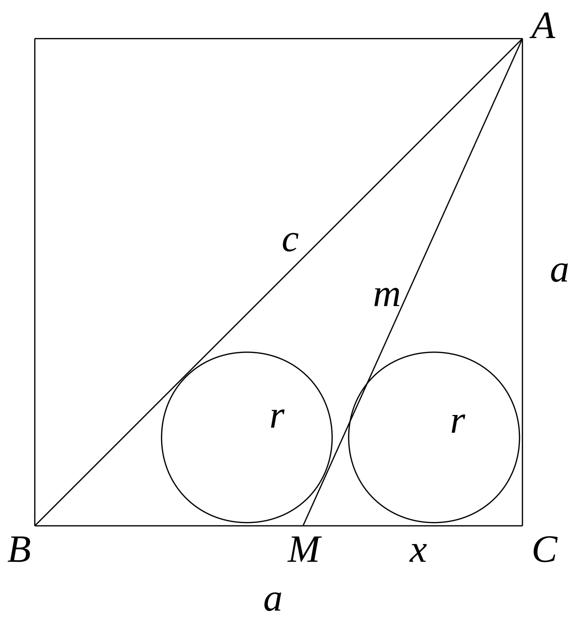
Anstataŭante (5) reen en (1):

$$r = \frac{a-b}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)b = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)$$

kaj fine,

$$r = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)c \qquad \blacksquare$$

# 5: Du egalaj cirkloj en kvadrato




Uzante la etikedojn en la diagramo, kie la longoj estas $AC = BC = a$, $AM$ estas la Ĉeva linio tuŝanta du cirklojn, kaj $AM = m$. Supozu $CM = x$, kaj la radiuso de cirklo estu $r$. $AB = c = a\sqrt{2}$.

En trilatero $AMC$ la radiuso de la encirklo estas

$$r = \frac{ax}{a+m+x} \quad \text{..............................................(1)}$$

kaj en trilatero $AMB$ ĝi estas

$$r = \frac{a(a-x)}{a-x+m+c} \quad \text{.........................................(2)}$$

Egaligante (1) kaj (2) donas

$$x(a+m+c-x) = (a-x)(a+m+x)$$

kaj rearanĝante donas al ni $m$ kiel:

$$m = \frac{x(a+c)-a^2}{a-2x} \quad \text{..................................................(3)}$$

Sed trilatero $ACM$ estas orta, kaj laŭ Pitagoro $x^2+a^2 = m^2$ ..............................................(4)

Anstataŭante por $m$: $(x^2+a^2)(2x-a)^2 - \left(x(a+c)-a^2\right)^2 = 0$

Ellaborante: $4x^4-4ax^3+a^2x^2+4a^2x^2-4a^3x+a^4 - (a+c)^2x^2+2a^2(a+c)x-a^4 = 0$

Kolektante potencojn de $x$: $4x^4-4ax^3+\left(5a^2-(a+c)^2\right)x^2+\left(-2a^3+2a^2c\right)x = 0$

Tamen, $x \neq 0$, kaj do, kaj ĉar $c^2 = 2a^2$

$$4x^3-4ax^2+(4a^2-2ac-2a^2)x-(2a^3-2a^2c) = 0$$

Trovante faktorojn: $4x^2(x-a)+(2a^2-2ac)(x-a) = 0$ aŭ $(x-a)(4x^2+2a^2-2ac) = 0$

Sed $x \neq a$, kaj do ni ricevas $x^2 = \dfrac{a(c-a)}{2}$ kaj el (4): $m^2 = x^2+a^2 = \dfrac{a(c+a)}{2}$

De orta trilatero $ACM$ ni povas skribi, memorante ke $c = a\sqrt{2}$, kaj anstataŭante por $x$ kaj $m$:

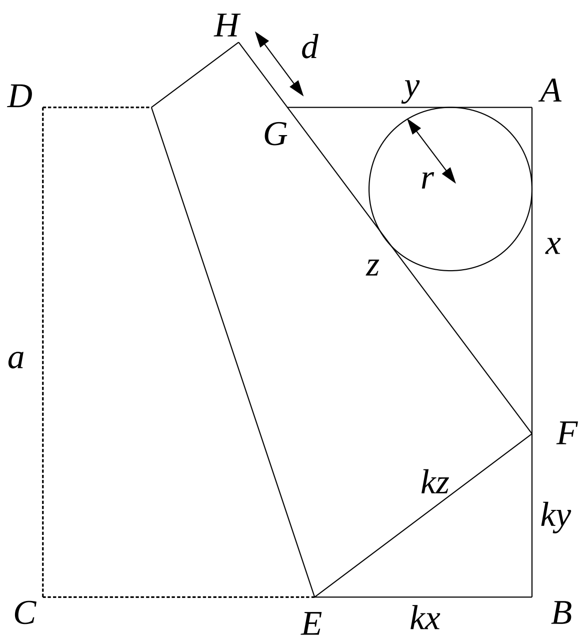
$$r = \frac{a+x-m}{2} = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)$$

$$1-\frac{2r}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+1-1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\right) = \sqrt{\sqrt{2}-1}$$

Do, fine, $$r = \frac{a}{2}\left(1-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) \quad \text{....................................................■}$$

## 6: Origamio

En la diagramo, *ABCD* estas papera kvadrato, de latero *a*, kaj *C* estas faldita sur *AB* ĉe *F*.




Difinu laterojn de trilatero *FAG* esti *x*, *y*, kaj *z* kiel montrate.

Trilatero *EBF* similas al trilatero *FAG*, kaj do respondantaj lateroj havas egalajn proporciojn. Do ni povas supozi ke la lateroj de *EBG* estu kiel montrate kie la komuna proporcio estas *k*.

La radiuso de la encirklo en la orta trilatero *FAG* estas trovita per lemo *L*:

$$r = \frac{x+y-z}{2}$$

kaj ĉar *FH* estas la latero de la kvadrato,

$$d = a-z$$

Por elmontri ke $r = d$ samas kiel elmontri ke

$$x+y-z = 2(a-z) \text{, aŭ } x+y+z = 2a \text{ ......(1)}$$

El *AB*: $$ky = a-x \text{ ......(2)}$$

*CE* estas faldita sur *FE*, kaj do $CE = kz$,

El *CB*: $$kz = a-kx \text{ ......(3)}$$

Kaj en trilatero *EBF*, per Pitagoro:

$$(kx)^2+(ky)^2 = (kz)^2 \text{ ......(4)}$$

Metante (2) kaj (3) en (4):

$$k^2x^2+(a-x)^2 = (a-kx)^2$$

kio, ĉar $x \neq 0$, simpliĝas al: $$x = 2a(1-k)$$

Remetante en (2): $$y = \frac{a(2k-1)}{k}$$

kaj de (3): $$z = \frac{a(2k^2-2k+1)}{k}$$

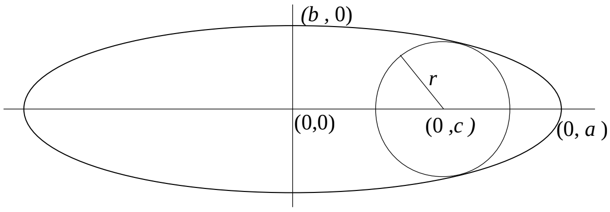
Do, $$x+y+z = a\left(\frac{2k(1-k) + (2k-1) + (2k^2-2k+1)}{k}\right) = 2a$$

kio elmontras (1) kiel petite. ......■

# 7: Elipso kaj ĉeno de cirkloj

Unue ni bezonas lemon kiu ligas tanĝantan cirklon al ĝia pozicio sur la ĉefa akso. Ni uzas la kutiman originon por elipso, kaj la kutiman notacion. La ĉefa akso havas longon *a* kaj la mallonga *b*.

Por cirklo centrigita ĉe ($c$, 0) kaj radiuso $r$, ni bezonas la kondiĉon por tanĝanteco.




La ekvacio por elipso estas

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

el kiu ni akiras $$y^2 = b^2-\frac{b^2x^2}{a^2} \text{ ..........................................................(1)}$$

kaj por la cirklo $$(x-c)^2+y^2 = r^2 \text{ .......................................................(2)}$$

Por punktoj komunaj al tiuj du kurboj, ni povas elimini $y^2$ por doni

$$(x-c)^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2} = r^2$$

Simpligante: $$(a^2-b^2)x^2 - 2a^2c\,x + a^2(b^2+c^2-r^2) = 0$$

Se la cirklo estus tanĝanta al la elipso, estus sola radiko solvinte por $x$, kaj ne paro da ili. Tia okazus se la diskriminanto estus nulo:

$$4a^4c^2 - 4(a^2-b^2)a^2(b^2+c^2-r^2) = 0$$

kio simpliĝas al $$b^2c^2 = (a^2-b^2)(b^2-r^2) \text{ ................................................(3)}$$

Ĉe du gravaj lokoj, ni akiras de (3):

(i) La cirklo kun centro ĉe la origino ($c$ = 0) havas radiuson $r_1 = b$.......................................(4)

(ii) La cirklo tanĝanta ĉe la fino de la ĉefa akso, kun centro ĉe ($a - r_2$, 0), havas radiuson el

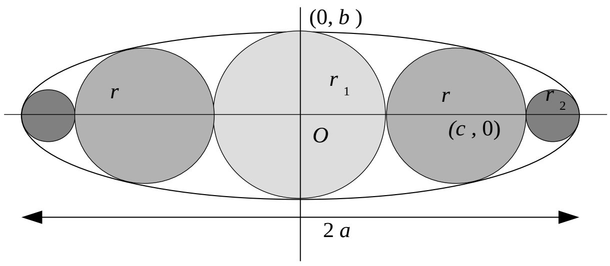
$$b^2(a-r_2)^2 = (a^2-b^2)(b^2-r_2^2)$$

kio estas $$(ar_2-b^2)^2 = 0$$

kaj do $$r_2 = \frac{b^2}{a} \text{ ............................................................(5)}$$

Nun ni estas lokitaj kie ni povas trakti la problemon kiel deklarita.

Por malpliigi la algebron en ĉi tiu ekzemplero bezonas iun lertecon, aŭ oni rapide perdos sian vojon.



Ni havas du taŭgajn ekvaciojn ligantajn $r$ kaj $b$, kaj ni devos forigi $b$, iumaniere.

Unue ni rimarku ke la cirkloj tuŝas unu al alia, kaj ni povas komputi la ĉefa duonakso tiel

$$a = r_1 + 2r + r_2 = b + 2r + \frac{2b^2}{a}$$

aŭ pli bone $$a^2 - 2b^2 = a(b+2r) \quad \text{.....................................................(6)}$$

La cirklo kun centro ĉe ($c$, 0), tuŝas la elipson. Ankaŭ $c = b+r$, kaj do ni akiras el (3)

$$b^2(b+r)^2 = (a^2-b^2)(b^2-r^2)$$

Dividante per ($b$ + $r$) $$b^2(b+r) = (a^2-b^2)(b-r)$$

Ellaborante $$b^3+b^2r = a^2b - a^2r - b^3 + b^2r$$

Rearanĝante $$a^2r = b(a^2-2b^2) \quad \text{.....................................................(7)}$$

Anstataŭante en (7) de (6) $$a^2r = b\,a(b+2r)$$

Dividante per $a$ kaj rearanĝante $$b^2 = r(a-2b) \quad \text{.....................................................(8)}$$

Metante (8) reen en (6) $$a^2 - 2r(a-2b) = a(b+2r)$$

Rearanĝante $$4rb - ab = 4ar - a^2$$

Trovante faktorojn $$b(4r-a) = a(4r-a)$$

Sed por elipso, $a \neq b$, kaj do devas esti ke 4 $r$ = $a$, aŭ kiel demandite

$$r = \frac{a}{4} \quad \text{.....................................................} \blacksquare$$

Por la aldonita demando, ni uzas (8), kaj metas la valoron de $r$ en ĝin.

$$b^2 = \frac{a}{4}(a-2b)$$

Rearanĝante $$4b^2 + 2ab - a^2 = 0$$

$$b = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2+16a^2}}{8}$$

$$b = \left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)a$$

Sed $b$ devas esti pozitiva, kaj la rilata valoro estas

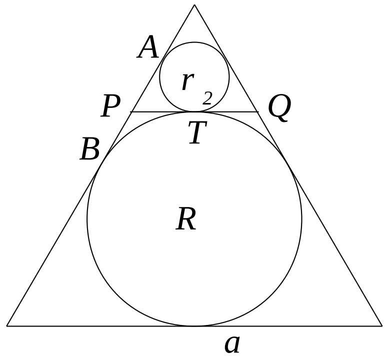
$$b = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)a \quad \text{.....................................................} \blacksquare$$

kaj la aranĝo ekzistas.

## 8: Piramido kaj sferoj

Ĉi problemo faciligeblas per uzo de rezulto en Ekzemplero 1 (Wasan).

Ni supozu ke la longo de la latero de la kvadrata bazo estu *a*, kaj ni trovos du esprimojn por *a* laŭ termoj de la radiusoj de la sferoj.




Unue ni pripensas sekcon de la piramido faritan vertikale tra la pinto kaj du mezpunktoj de kontraŭaj lateroj de la kvadrata bazo. Tiu kaze per simetrio, la centra sfero kaj la supra sfero ambaŭ tuŝas la laterojn de la sekco. Do ni povas uzi la notacion en la diagramo.

Denove per simetrio, $PQ \; = \; 2PT \; = \; PA + PB \; = \; AB$

kaj $AB \; = \; 2\sqrt{(R r_2)}$ laŭ Ekzemplero 1.

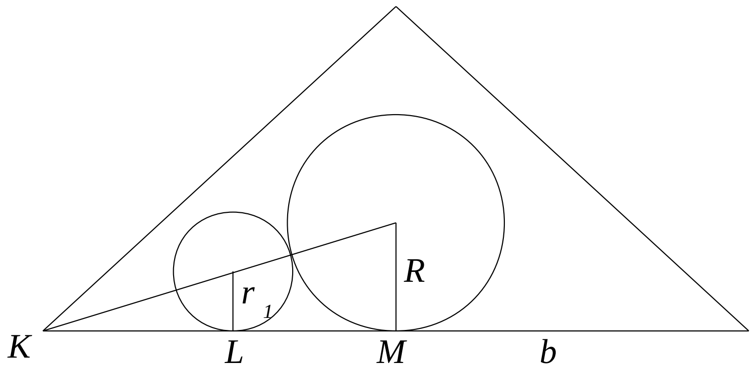
En similaj trilateroj, respondantaj eroj havas saman proporcion, do

$$\frac{R}{r_2} \; = \; \frac{a}{PQ} \; = \; \frac{a}{AB} \; = \; \frac{a}{2\sqrt{(R r_2)}}$$

aŭ, solvante por *a*: $a \; = \; \dfrac{2R\sqrt{(R r_2)}}{r_2}$ .......................................................(1)

Nun ni pripensas sekcon de la piramido vertikale tra la pinto kaj du diagonale kontraŭaj anguloj de la bazo.

Tiu kaze la sferoj ne tuŝas la laterojn. Tamen, pro simetrio la linio pasanta tra la centroj ankaŭ pasas tra angulo de la bazo de la piramido.




Uzante la notacion en la diagramo, *M* estas la centro de la bazo, kaj la longo de la bazo de la trilatero, *b*, be *a*√2.

El ekzemplero 1, ni havas:

$$LM \; = \; 2\sqrt{R r_1}$$

Per simila trilateroj, respondantaj eroj tenas siajn proporciojn unu al aliaj, do ni povas skribi

$$\frac{R}{KM} \; = \; \frac{r_1}{KL} \; = \; \frac{R - r_1}{KM - KL} \; = \; \frac{R - r_1}{LM} \; = \; \frac{R - r_1}{2\sqrt{R r_1}}$$

Sed *b* estas la diagonalo de la kvadrata bazo, kaj *KM* = *b* / 2 = (*a*√2) / 2, kaj do

$$\frac{R}{KM} \; = \; \frac{2R}{a\sqrt{2}} \; = \; \frac{R - r_1}{2\sqrt{R r_1}}$$

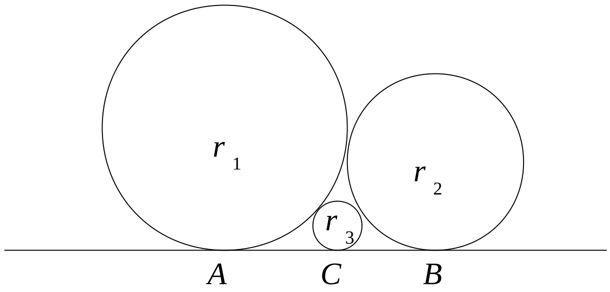
Solvante por *a*: $a \; = \; \dfrac{4R\sqrt{R r_1}}{\sqrt{2}(R - r_1)}$ .......................................................(2)

Egaligante (1) kaj (2), $$\frac{\sqrt{r_2}}{r_2} = \frac{2\sqrt{r_1}}{\sqrt{2}\left(R-r_1\right)}$$

$$\left(R-r_1\right) = \sqrt{2}\sqrt{r_1 r_2}$$

kaj fine, $$R = \sqrt{2 r_1 r_2} + r_1 \text{ ........................................................} \blacksquare$$

## 9: Tri cirkloj sur linio




Ĉi tiu estas plej facile solvita per uzo de ekzemplero 1.

Kun la etikedoj kiel montrite en la diagramo, ni havas

*AB* = *AC* + *CB*

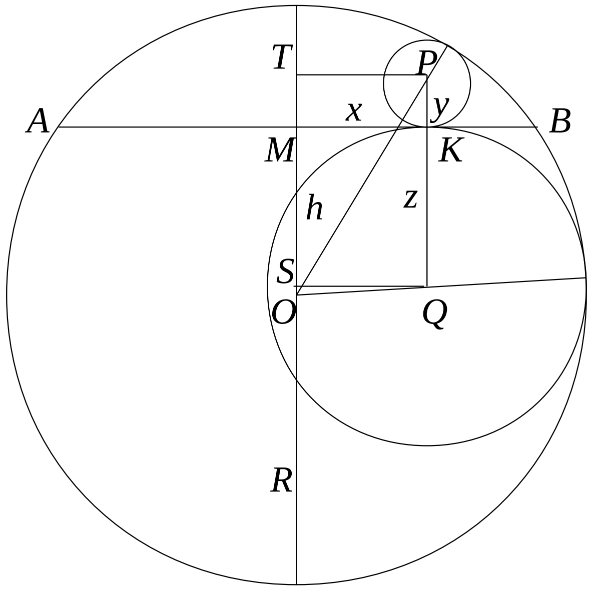
Per ekzemplero 1, ni povas trovi ĉiujn de la partoj laŭ termoj de la radiusoj de la cirkloj, kiuj tuŝas ĉe la finoj de ĉiu parto.

$$2\sqrt{r_1 r_2} = 2\sqrt{r_1 r_3} + 2\sqrt{r_3 r_2} \text{ ..........................................(1)}$$

Dividante (1) trae per $2\sqrt{r_1 r_2 r_3}$

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}} \text{ ....................................................} \blacksquare$$

## 10: Du cirkloj sur ŝnuro




En la diagramo, *M* estas la mezo de *AB*.

La centroj de du cirkloj estas *P* kaj *Q*, la radiusoj estas respektive *y* kaj *z*. La centro de la ekstera cirklo estas *O* kaj ĝi havas radiuson *R*.

[La radiusoj estas renomitaj por eviti uzi sufiksojn.]

Supozu *MK* = *x*, *OM* = *h*.

Desegnu *PT* kaj *QS* paralele al *AB* kuniĝante *OM*, etendita se necese, ĉe *T* kaj *S*.

Do anguloj *OTP* kaj *OSQ* estas ortaj.

Ni apliku Pitagoron du fojojn. Unue en trilatero *OTP*.

$$x^2 + (y+h)^2 = (R-y)^2$$

Ellaborante: $$x^2 + y^2+2hy+h^2 = R^2-2Ry+y^2$$

kiun ni aranĝas al:

$$\frac{R^2-x^2-h^2}{2} = y(R+h) \text{ ..................................................(1)}$$

Simile, en trilatero *OSQ*,

$$x^2 + (z-h)^2 = (R-z)^2$$

Ellaborante: $$x^2 + z^2-2hz+h^2 = R^2-2Rz+z^2$$

Rearanĝante:

$$\frac{R^2-x^2-h^2}{2} = z(R-h) \text{ ..................................................(2)}$$

La maldekstra flankoj de (1) kaj (2) estas identaj, do ni povas egaligi la dekstrajn flankojn:

$$y(R+h) = z(R-h)$$

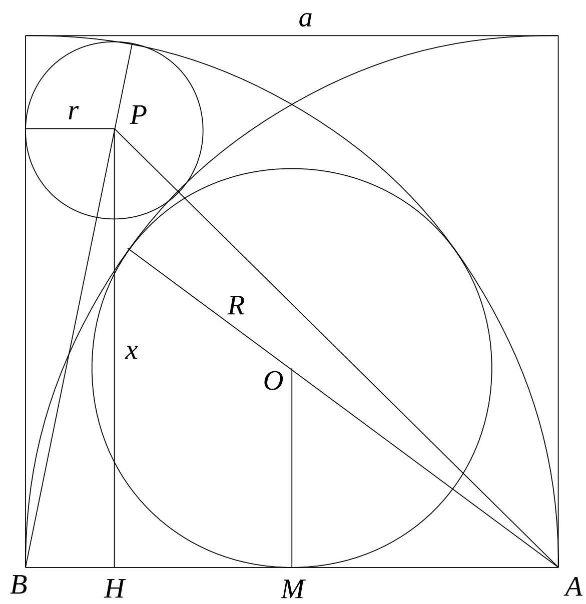
aŭ $$\frac{y}{z} = \frac{R-h}{R+h}$$

La maldekstra flanko estas la petita proporcio. La dekstra flanko ne dependas de *x*. Tiu signifas ke

$$\frac{y}{z} \text{ ne dependas de } x \text{ ......................................................} \blacksquare$$

# 11: Kvaroncirkloj

Eĉ pli da helpo de Pitagoro.




En la diagramo, *O* kaj *P* estas la centroj de la cirkloj.

Per simetrio, *M* estas la centro de *AB*, kaj do *AM* estas *a*/2.

La radiuso de la kvaroncirklo kun centro ĉe *A* estas la latero de la kvadrato *a*, kaj la cirklo kun centro ĉe *O* tuŝas la kvaroncirklon, kies radiuso estas *a*, do *AO* = *a* – *R*, kaj *OM* estas la radiuso, *R*.

En orta trilatero *AMO*:

$$AO^2 = AM^2 + OM^2$$

Do,

$$(a-R)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2$$

$$4(a^2-2aR+R^2) = a^2+4R^2$$

$$4a^2-8aR = a^2$$

$$8R = 3a$$

$$R = \frac{3}{8}a \text{ ..........................................................} \blacksquare$$

Faligi perpendiklon de *P* al *AB* ĉe *H*, kaj supozu *PH* = *x*. Ni ankaŭ havas *AP* = *a* + *r*, *BH* = *r*, *BP* = *a* – *r*, *AH* = *a* – *r*.

En orta trilatero *AHP*, per Pitagoro,

$$x^2 = AP^2 - AH^2 = (a+r)^2-(a-r)^2 = (a+r+a-r)(a+r-a+r) = 4ar \text{ .........(1)}$$

En orta trilatero *BHP*, denove per Pitagoro,

$$x^2 = BP^2 - BH^2 = (a-r)^2-r^2 = (a-r+r)(a-r-r) = a(a-2r) \text{ .............(2)}$$

Egaligante la dekstrajn flankojn de (1) kaj (2):

$$4ar = a(a-2r)$$

$$4r = a-2r$$

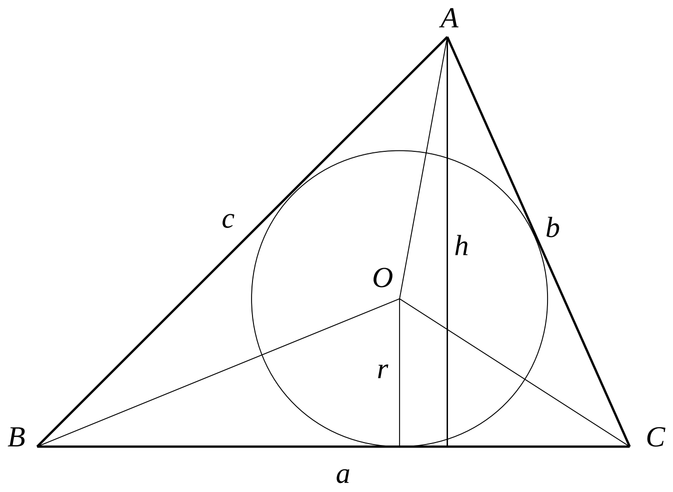
kaj fine,

$$r = \frac{a}{6} \text{ ..........................................................} \blacksquare$$

## 12:   Teoremo 9

Unue rimarku ke sufiĉas elmontri ke la rilato pravas post kiam du trilateroj (t.e. $n$ = 2) estis kombinitaj, ĉar ni povus tiam kombini du formigi unu, kaj tiam kombini tiun kun la sekva formigi ankoraŭ unu, kaj tiel plu, ĝis nur la plej granda trilatero restos. Ĉiufoje trilatero inkluziviĝas, ĝia responda faktoro inkluziviĝas en la produto.

Sekve ni establas rilaton inter la esprimo $(1 – 2r/h)$ kaj la longoj de la lateroj de la trilatero. Uzante la notacion en la diagramo, ni povas valorigi la areon, $T$, de trilatero $ABC$ per 2 malsamaj manieroj, kiel aŭ duono de la produto de alteco kaj bazo, aŭ sumo de tri trilateroj $BOC$, $COA$ kaj $AOB$, ĉiu kun alteco $r$ kaj bazoj la tri lateroj vice.




Egaligante la du manierojn, ni akiras

$$T = ½ah = ½ar + ½br + ½cr$$

de kiu plu

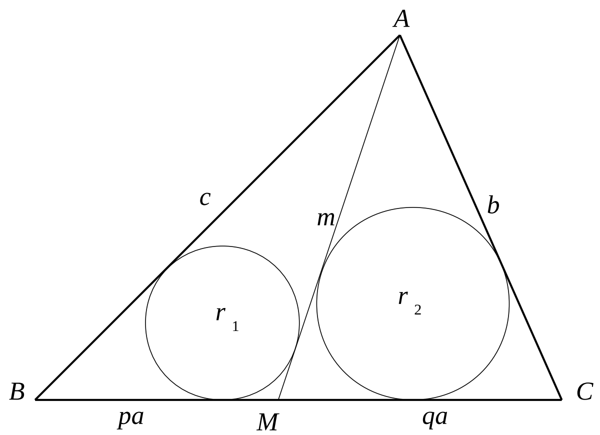
$$r(a+b+c) = ah \text{ aŭ } \frac{r}{h} = \frac{a}{a+b+c}$$

Pli taŭge por nia posta uzo:

$$1-\frac{2r}{h} = \frac{b+c-a}{b+c+a} \text{ ......................................................}(1)$$

Nun ni trovas la longon, $m$, de linio de $A$ kiu pasas la bazon de la trilatero ĉe $M$ laŭ termoj de longoj de diversaj linioj.

En la diagramo, supozu ke $BM$ estu $pa$ kaj $CM$ estu $qa$, tiel ke $p + q = 1$. Ni uzos la regulon kosinuso por angulo $B$ en trilateroj $ABC$ kaj $ABM$, kaj tiam eliminos la termon cos $B$. La radiusoj de la encirkloj, $r_1$ kaj $r_2$, estas kiel montrite.




En trilatero $ABC$,

$$b^2 = c^2+a^2-2ac\cos B \text{ .................................................}(2)$$

kaj en trilatero $ABM$,

$$m^2 = c^2+p^2a^2-2pac\cos B \text{ .............................................}(3)$$

Multiplikante (2) de $p$ kaj subtrahante de (3):

$$m^2 - p\,b^2 \;=\; (c^2 - p\,c^2) + (p^2 a^2 - p\,a^2) \;=\; c^2(1-p) + p\,a^2(p-1)$$

Sed $q$ = 1-$p$, kaj do

$$m^2 \;=\; p\,b^2 + q\,c^2 - p\,q\,a^2 \text{ ..................................................(4)}$$

La alteco, $h$, de trilateroj $ABM$ kaj $ACM$ estas la sama ol de $ABC$, t.e. $h$. Aplikante la rezulton (1) de supere al ĉiu el tiuj vice, ni akiras:

$$1 - \frac{2\,r_1}{h} \;=\; \frac{m + c - p\,a}{m + c + p\,a} \text{ kaj } 1 - \frac{2\,r_2}{h} \;=\; \frac{m + b - q\,a}{m + b + q\,a}$$

Multiplikante ilin kune:

$$\left(1 - \frac{2r_1}{h}\right)\left(1 - \frac{2\,r_2}{h}\right) \;=\; \frac{(m + c - p\,a)}{(m + c + p\,a)} \cdot \frac{(m + b - q\,a)}{(m + b + q\,a)}$$

Pripensu la denominatoron multiplikinte kune, kaj anstataŭante por $m^2$ el (4).

$$(m + c + p\,a)(m + b + qa) \;=\; m(b + c + p\,a + q\,a) + (p\,b^2 + q\,c^2 - p\,q\,a^2) + b\,c + q\,a\,c + p\,a\,b + p\,q\,a^2$$

Ĉar $p$+$q$ = 1, ni havas $pa$+$qa$ = $a$, kaj $bc$ = $pbc$+$qbc$.

$$(m + c + p\,a)(m + b + qa) \;=\; m(b + c + a) + (p\,b^2 + q\,c^2) + (p\,b\,c + q\,b\,c) + q\,a\,c + p\,a\,b$$

$$(m + c + p\,a)(m + b + qa) \;=\; m(b + c + a) + p\,b^2 + p\,b\,c + p\,b\,a + q\,b\,c + q\,c^2 + q\,a\,c$$

$$(m + c + p\,a)(m + b + qa) \;=\; m(b + c + a) + p\,b(b + c + a) + q\,c(b + c + a)$$

$$(m + c + p\,a)(m + b + qa) \;=\; (m + p\,b + q\,c)(b + c + a)$$

Simile, la numeratoro skribeblas kiel

$$(m + c - p\,a)(m + b - qa) \;=\; (m + p\,b + q\,c)(b + c - a)$$

Do,

$$\left(1 - \frac{2r_1}{h}\right)\left(1 - \frac{2r_2}{h}\right) \;=\; \frac{(m + p\,b + q\,c)(b + c - a)}{(m + p\,b + q\,c)(b + c + a)} \;=\; \frac{b + c - a}{b + c + a} \;=\; 1 - \frac{2\,r}{h} \text{ ................}\blacksquare$$

kio kompletigas la pruvon.

## Alternativa pruvo

Scio de la formulo de Herono por la areo, $T$, de trilatero, ebligas pli facilan pruvon.

Uzante la konvencian $s \;=\; \dfrac{a + b + c}{2}$ por la duonperimetro, kiel antaŭe ni akiras la ekvacion (1), kaj nun daŭrigas:

$$1 - \frac{2\,r}{h} \;=\; \frac{b + c - a}{b + c + a} \;=\; \frac{s - a}{s} \;=\; \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2(s-b)(s-c)} \;=\; \frac{T^2}{s^2(s-b)(s-c)} \;=\; \frac{r^2}{(s-b)(s-c)}$$

Sed la centro de la encirklo kuŝas sur la dusekcojn de la anguloj de la trilateroj. Do rigardante la unuan diagramon, ni rimarkas ke

$$1-\frac{2r}{h} = \left(\frac{r}{s-b}\right)\left(\frac{r}{s-c}\right) = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \text{ ....................................(5)}$$

kio elmontras ke la faktoro $\left(1-\frac{2r}{h}\right)$ dependas nur de la anguloj ĉe la bazo de la trilatero.

En la dua diagramo, supozu $\angle AMB = 2\theta$, do $\angle AMC = 180 - 2\theta$,

Sed $$\tan(90-\theta) = \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \text{ .............................................(6)}$$

Do,

$$\left(1-\frac{2r_1}{h}\right)\left(1-\frac{2r_2}{h}\right) = \tan\frac{B}{2}\ \tan\theta\ \tan(90-\theta)\ \tan\frac{C}{2} = \tan\frac{B}{2}\ \tan\frac{C}{2} = 1-\frac{2r}{h} \text{ .....}\blacksquare$$

Klare, se estus pli ol du trilateroj, multiplikinte ĉiujn funkciojn tan, krom la unua kaj la lasta ĉiuj eliminiĝus.